学术学位
研究生核心课程指南(一)

（试　行）

国务院学位委员会第七届学科评议组　编

高等教育出版社·北京

0701 数学一级学科研究生核心课程指南

01　微分几何

一、课程概述

微分流形是欧氏空间的自然推广,是现代数学的基石与平台,现代数学的研究内容与方法很少不与流形发生联系。而微分几何,或者流形上的分析可以说是微积分和线性代数应用到流形。微分流形与微分几何应是数学学科研究生必修的基础课程。学好本课程,为进一步学习黎曼几何、几何分析、李群与对称空间、复几何等专业课程打下坚实的基础。

二、先修课程

微积分、线性代数、集合论、经典微分几何(三维欧氏空间里的曲线论与曲面论)、基础拓扑学(包含基本群、同调群与欧拉数)。

三、课程目标

熟练掌握微分流形的概念和基本知识,掌握现代微分几何中度量、联络、曲率的概念并能正确进行基本运算。

四、适用对象

博士研究生和硕士研究生。

五、授课方式

主要采用课堂授课和课堂做题,配合课后练习与答疑。

答疑采用邮件答疑、微信答疑和办公室答疑。

六、课程内容

1. 微分流形

微分结构、微分同胚、浸入与嵌入、定向、向量场、李群初步。

2. 度量

黎曼度量、体积形式。

3. 联络

仿射联络、Levi-Civita 联络(黎曼几何基本定理)。

4. 测地线

测地线的几何、微分算子(梯度与拉普拉斯算子)。

5. 曲率

张量、曲率张量、截面曲率、Ricci 曲率、数量曲率、欧拉示性数、Gauss-Bonnet-Chern 定理。

6. Jacobi 场

Jacobi 场与共轭点,Cartan-Hadamard 定理。

7. 子流形几何

第二基本型、子流形基本方程、极小子流形、超曲面、活动标架方法。

8. Hermitian 几何

近复结构、Hermitian 度量、活动标架方法。

- 重点:联络与曲率,要学会基本的曲率计算(分别用倒三角方法和活动标架方法)。
- 难点:活动标架方法。

七、考核要求

总考核成绩综合考虑平时课堂练习表现、课后习题完成情况与期末考试得分。

八、编写成员名单

唐梓洲(南开大学)

02 复几何

一、课程概述

复几何是介于复分析、微分几何、代数几何之间的一门研究生专业课程。复几何的起源可从黎曼面的研究开始。随着多复复变的理论和整体微分几何的发展,对高维的复流形研究,数学家们建立起一些基本理论,如 Dolbeault-上同调群、Zech-上同调群、Kodaira-Kuranish 复结构形变理论等。凯勒几何是复几何的主要研究内容。许多著名的猜测和定理,如 Hodge-Dolbeault 的调和形式分解定理、Frankel 猜测、Calabi 问题等,都是有关凯勒流形的研究。本课程主要介绍有关复几何的一些经典定理、基本的研究方法以及一些重要的研究领域。

二、先修课程

复变函数、微分几何。

三、课程目标

本课程主要介绍有关复几何的一些经典定理、研究方法以及一些重要的研究领域,能使学

生了解到微分几何,特别是复几何的一些前沿研究方向。

四、适用对象

具有复变函数基础知识,和初步的微分几何知识的本科生、研究生都合适。

五、授课方式

主要是教学演讲。

六、课程内容

第一章　黎曼面基础理论

复几何的起源可从黎曼面的研究开始。黎曼面单值化定理告诉我们一个单连通的黎曼面全纯等同(或共形)于以下三类曲面:

$$S^2 = C \cup \{\infty\};C;\ \Delta = \{\ |z| < 1\}$$

对于平面区域 $D \subseteq C$,黎曼映射定理告诉我们,如果 D 是单连通,且边界至少具有两个点,那么 D 必全纯等同于 Δ. 黎曼面单值化的一个完整证明最早是由 Kobe 和 Poincare 在 1907 年分别给出。

由黎曼面单值化定理知,除了一维复球面,黎曼面的分类可转化成 C 或 Δ 的全纯覆盖变换群的分类。很容易知道万有覆盖空间是 C 的黎曼面是 $C \setminus \{0\}$,或者商空间 C/Z^2。亏格 $g>1$ 的黎曼面,我们有:

$$M \cong \Delta/\Gamma,$$

这里全纯覆盖变换群 Γ 是 Δ 上的一个离散 Mobius 变换子群。

主要内容:主要围绕黎曼面单值化定理的证明。可先介绍用共形映射和 Perron 方法来证明有关平面区域的黎曼映射定理;黎曼面单值化定理的证明可用 Hodge-分解定理来构造带奇点的亚纯 1-形式的存在。作为复几何的一个基本定理,Hodge-分解定理的介绍和证明可安排单独一章(见第二章);简单介绍黎曼面的复结构模空间 Rg 和 Teichmuler-空间 Tg。Teichmuler-空间中的全纯等价关系限制在同一同伦类里;亏格 $g > 1$ 时,模空间 Rg 的维数 $3g-3$ 的证明可用 Kodaira-Kuranish 复结构形变理论和 Serre 对偶定理。作为复几何中的一个重要理论,可安排单独一章介绍 Kodaira-Kuranish 复结构形变理论(见第五章)。

第二章　Dolbeault-上同调群和 Zěch-上同调群

许多有关复流形的基本定理是依赖于多复变的函数理论。通过引进$\bar{\partial}$——外微分算子,

$\bar{\partial}:(TM^*)^{p,q}$

$\to (TM^*)^{p,q+1}$,

我们可定义 Dolbeault-上同调群,

$H^{p,q}(M) = \{\alpha \in (TM^*)^{p,q} \mid \bar{\partial}\alpha = 0\} / \mathrm{Image}(\bar{\partial})$

相应于 Dolbeault-上同调群,复流形上可定义层上 Zěch-上同调群。Dolbeault-上同调群和 Zěch-上同调群都可定义在取值在全纯复向量丛空间 F 上。根据 Dolbeault-上同调理论,我们有下面的同构关系,

$H^q(M,\Omega^p\otimes F)\cong H^{p,q}(M,F)$

著名的 Kodaira 有关复结构的无穷小形变空间 $H^1(M,TM^{1,0})$ 是全纯切向量丛层 $TM^{1,0}$ 上的第一Zěch-上同调群。由上式我们得到

$H^1(M,TM^{1,0})\cong H^{0,1}(M,TM^{1,0})$

主要内容:简单介绍复流形、复结构和全纯复向量丛;介绍$\bar{\partial}$-外微分算子,de Rham-上同调群和 Dolbeault-上同调群;简单介绍全纯向量丛层和 Cěch 上同调及 Dolbeault-同构定理的证明。

第三章　凯勒几何

设$(z^1,\cdots,z^n)$是 n 维复流形 M^n 上的一个局部全纯坐标。M 上的一个 Hermtian 度量在局部坐标系下是对应于一个正定 Hermtian 矩阵,

$$h=(hij)>0.$$

那么

$$\omega_h=ih_{i\bar{j}}dz^i\wedge d_{\bar{z}^j}$$

是一个实的$(1,1)$-形式。如果 ω_h 满足

$$d\omega_h=0,$$

则 h 称为凯勒度量。一个复流形如果存在一个凯勒度量,我们称之为凯勒流形。凯勒流形的主要例子来自代数簇,即复射映空间中的复子流形。凯勒几何是复几何的主要研究内容。著名的 Hodge-Dolbeault 的调和形式分解定理是建立在凯勒几何上。

主要内容:全纯曲率张量和双全纯截面曲率的定义;里奇曲率张量和第一陈类;Frankel 猜测和凯勒-爱因斯坦流形;Calabi 问题与蒙日-安倍方程。

第四章　$\bar{\partial}$-调和形式和 Hodge-Dolbeault-分解定理

设 δ 和$\bar{\partial}^*$ 分别是凯勒度量 h 下关于外微分 d 和$\bar{\partial}$的余算子$\bar{\partial}^*$。那么

$$\Delta=d\cdot\delta+\delta\cdot d,$$
$$\Delta_{\bar{\partial}}=\bar{\partial}\cdot\bar{\partial}^*+\bar{\partial}^*\cdot\bar{\partial}$$

是分别定义在形式空间上的 Beltram-Laplace 和 Hodge-Laplace 算子。并且有

$$\Delta=2\Delta_{\bar{\partial}}.$$

类似于 Hodge-定理,我们有下面的 Hodge-Dolbeault-同构定理,

$$\begin{aligned}H^{p,q}(M)&\cong H^{p,q}(M)\\&=\{\alpha\in\Gamma((TM^*)^{p,q})\mid\Delta_{\bar{\partial}}\alpha=0\}.\end{aligned}$$

特别,我们有如下的 de Rham-上同调群分解,

$$H^l(M)\cong\oplus_{l=p+q}H^{p,q}(M),\ \forall\, l\leqslant 2n.$$

这里 $H^l(M)$是 l-阶 de Rham-上同调群。所以研究 de Rham-上同调群本质上是研究调和的(p,q)形式。

主要内容:调和形式和 Hodge-分解定理;$\bar{\partial}$的余算子$\bar{\partial}^*$ 和 Dolbeault-分解定理;$\bar{\partial}$-弱闭形式

和(p,q)-形式的 L^2-分解;弱调和形式的正则性证明。

第五章 Kodaira-Kuranish 复结构形变理论

主要内容:复结构形变空间和万有形变空间;无穷小形变空间 $H^1(TM^{1,0})$ 和 Maurer-Cartan 方程;Kodaira 的万有形变空间的构造;卡拉比- 丘成桐流形和 Bogomolov-田刚-Todorov 定理。

第六章 典则度量

近几十年来,随着几何分析的发展,人们引进了与凯勒-爱因斯坦度量密切相关的其他典则度量,如凯勒-里奇孤立子,带锥奇性的凯勒-爱因斯坦度量和 Calabi-极值度量等。这一章可简单介绍这几种典则度量的来源、几何背景和研究现状。

七、考核要求

课程考试。

八、编写成员名单

朱小华(北京大学)

03 拓扑学

一、课程概述

拓扑学是基础数学专业的几何与拓扑方向研究生的学科必修课,同时也可以作为数学各专业研究生的选修课。拓扑学与代数学、分析学共同构成现代数学的三大支柱,拓扑学的结果与方法深刻地影响到当今数学各分支,在物理学、计算机科学、经济学等许多自然科学与社会科学领域中也有着广泛的应用。代数拓扑学利用抽象代数的工具研究拓扑空间的拓扑性质,目标是提供研究拓扑学问题的代数方法,包括各种代数不变量的构造与计算方法。

二、先修课程

点集拓扑学(包括拓扑空间,连续映射,同胚,商空间,连通性与道路连通性,分离性,紧性,度量化等内容),抽象代数(包括群、阿贝尔群、模、环、范畴与函子等内容)。

三、课程目标

本课程要介绍的主要不变量为基本群、同调群、上同调群与上同调环,核心内容为它们的定义与计算方法。通过本课程的学习,需要掌握这些不变量的定义与基本性质,对代数拓扑研究的基本问题及解决方法有初步了解,为进一步学习现代数学及从事各种专业研究打下基础。

四、适用对象

数学一级学科基础数学专业的博士研究生和硕士研究生。

五、授课方式

课堂教学,鼓励学生做好预习和复习。

六、课程内容

第一部分　基本群与覆叠空间

包括同伦与同伦型,基本群函子的定义,覆叠空间的定义与提升性质,覆叠空间的存在性,万有覆叠空间,覆叠变换,覆叠空间的分类,利用覆叠空间计算基本群,Seifert-Van Kampen 定理,紧曲面的基本群,紧曲面的构造与分类定理。预计学时:16 学时。

第二部分　单纯同调论与奇异同调论

单纯同调论内容包括:单纯复形与单纯映射,单纯同调群的定义与计算实例,计算曲面的同调群,Euler-Poincaré 示性数,相对同调群,正合同调序列,Mayer-Vietoris 同调序列,带任意系数的同调,同调群的拓扑不变性(概要),球面自映射的映射度,Lefschetz 不动点定理。奇异同调论内容包括:奇异同调群的定义与例子,链复形,奇异同调群是同伦型不变量,相对奇异同调群的定义,正合同调序列,切除定理,奇异同调中的切除,奇异同调群的 Mayer-Vietoris 序列、单纯同调与奇异同调之间的同构、胞腔复形、胞腔复形的同调与应用。预计学时:24 学时。

第三部分　上同调简介

可选内容包括 Hom 函子,单纯上同调群,相对上同调,上同调论,自由链复形的上同调,自由链复形中的链等价,胞腔复形的上同调,上积,曲面的上同调环,带任意系数的同调等。预计学时:8 学时。

第四部分　同调代数简介

可选内容包括 Ext 函子,上同调的万有系数定理,挠积,同调的万有系数定理,其他万有系数定理,链复形的张量积,Künneth 定理,Eilenberg-Zilber 定理,上同调的 Künneth 定理,应用:积空间的上同调环。预计学时:8 学时。

第五部分　流形上的对偶

包括 Poincaré 对偶、卡积、Lefschetz 对偶、Alexander 对偶。预计学时:8 学时。

教学建议:当课时安排不足时,建议根据实际情况减少第三至五部分的教学内容。

七、考核要求

以闭卷考试为主,部分内容可以实行有监考的开卷考试,或进行答辩的口试。

八、编写成员名单

邱瑞锋(华东师范大学)、张影(苏州大学)

04 代数学

一、课程概述

代数学是数学的一个重要而基础的分支，它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构——群、环、域、模、代数等的性质为其中心问题的。代数运算贯穿在任何数学理论和应用问题中，代数结构及其中的元素具有广泛的一般性，所以代数学在现代数学中具有重要的基本性，它的方法和结果渗透到众多不同的数学分支中，并且在物理学、化学、计算机科学、编码理论、密码学、数字通信等学科中也有直接的应用。代数学应是数学学科各个方向研究生的必备基础课程。

二、先修课程

高等代数、抽象代数、初等数论。

三、课程目标

掌握代数学的基本概念，主要是群、环、域、模、代数、范畴的概念，以及这些代数结构的基本理论，熟悉代数学的语言和基本方法，了解交换代数、同调代数、代数几何等进一步的理论方法，为学习现代数学、物理学和其他学科提供基础。

四、适用对象

代数学可以作为数学专业研究生的学位基础课，根据学校的特色学习部分或者全部内容，每周 4 学时，全部内容需要一学年。前面 4 部分内容可以作为数学各专业的基础课。后面 3 部分内容，可作为基础数学专业基础课。

五、授课方式

主要采用课堂授课，配合课后练习与答疑。

六、课程内容

1. 群论

基本概念、同态与同构、群作用、中心化子、正规化子、稳定化子、商群、拉格朗日定理、合成列。群作用于置换表示、左乘作用与凯莱定理、共轭作用与类方程、Sylow 定理、An 的单性。直积与半直积。预计 24 课时(6 周)。

2. 环论

基本概念、环同态与商环、理想、Jacobson 根、分式环、中国剩余定理、素理想与极大理想。欧几里得整环、主理想整环、唯一分解整环。多项式环的唯一分解性、不可约性的判别、Hilbert 基定理和 Hilbert 零点定理(有初等证明)。预计 24 课时(6 周)。

3. Galois 理论

基本定理、应用、范数和迹、Hilbert 定理 90、有限域及其 Galois 理论、正规基定理、Kummar 扩张、Noether 正规化定理等。预计 16 课时(4 周)。

4. 模论

基本概念、模同态、模的直和与直积、自由模、Hom 与投射模、内射模、张量积与平坦模、张量代数、对称代数与外代数、主理想整环上的有限生成模等。预计 16 课时(4 周)。

5. 有限群的表示理论

完全可约性、特征标、正交关系、诱导表示、Frobenius 互反定理、Brauer 定理。预计 16 课时(4 周)。

6. 交换代数与代数几何

素理想与素谱、环与仿射簇的维数、环与模的局部化、Nakayama 定理、诺特环与 Hilbert 基定理、Hilbert 零点定理与函数环、准素分解与子簇的分解、环的整扩张与仿射簇的覆盖、环的正规化与曲线的奇点解消、离散赋值环与曲线的光滑点、戴德金整环与光滑曲线、阿丁环与曲线的相交。预计 28 课时(7 周)。

7. 同调代数

范畴概念、函子与自然变换、范畴的等价、可表函子、Yoneda 引理、加性与 abelian 范畴、复形与同调、同调长正和列、同伦、导函子、Ext 与 Tor、群的上同调、Koszul 复形和 Hilbert 的 Syzygy 定理、谱序列、导范畴。预计 36 课时(9 周)。

七、考核要求

总考核成绩综合考虑平时课堂练习表现、课后习题完成情况与期末考试得分。

八、编写成员名单

谈胜利(华东师范大学)

05 数论

一、课程概述

数论是数学最古老的分支,同时也一直是基础数学最受关注的分支之一,数论是数学发展的重要源泉,数学中的许多重要理论都是为了解决数论的问题而发展起来的。在数学学科研究生中开设数论是非常必要的。

二、先修课程

数学分析、高等代数、抽象代数、复变函数,最好了解一些泛函分析和点集拓扑。

三、课程目标

通过此课程的学习，了解数论的基本问题和研究方法。

四、适用对象

数学学科所含二级学科的博士和硕士研究生。

五、授课方式

课堂教学。

六、课程内容

1. 解析方法

ζ-函数、L-函数的解析性质以及它们的零点和极点的分布；非零区域与零点密度定理；素数定理及其证明；算术级数中的素数定理及其证明；圆法以及三素数定理的证明；大筛法，素数在算术级数中的平均分布，Bombieri-Vinogradov 定理及其证明。

2. 代数方法

代数数域及其扩充，迹、范数，判别式，regulator；代数数域的实嵌入和复嵌入；Minkowski 关于中心对称凸区域中格点的定理，用该定理证明 Dirichlet 关于代数整数环的单位群的结构的定理；代数数域的离散赋值，离散赋值在扩域上的扩充和分歧性质，代数数域上的阿基米德和非阿基米德度量；代数数域的类群、类数；局部域；p-adic 数，Dedekind 整环，准素分解；分解群，惯性群，欧拉因子，Dedekind ζ-函数，Artin L-函数。

以上内容可以在两个学期完成。

七、考核要求

通过课程考试方式考核。

八、编写成员名单

刘建亚（山东大学）、扶磊（清华大学）

06　泛函分析

一、课程概述

泛函分析是数学院（系）所有研究生专业的基础课之一，它综合地运用分析、代数和几何的方法，主要研究无限维拓扑线性空间和这类空间之间各种映射的一般性质。

20世纪初,在 Fredholm、Hilbert、Volterra 和 Von Neumann 等在研究变分法、积分方程、微分方程以及量子物理的过程中,出现了无穷维空间上分析学的萌芽。到20世纪30年代,泛函分析已经形成一门独立的数学分支。一方面,泛函分析把具体问题抽象到更加纯粹的具有代数、拓扑和分析结构的函数空间中来研究,不断接受来自数学各方面新思想的浸润,与数学的其他分支相互渗透;另一方面,在泛函分析的发展过程中,也受到了来自数学外部力量的推动,包括物理、控制理论以及许多工程技术学科。现代泛函分析已演变成一个庞大的数学体系,呈现出与其他数学分支、其他学科深入交融、联动发展的趋势。泛函分析的研究主要包括:Banach 空间理论、算子理论和算子代数、非线性泛函分析、泛函分析应用等方面。

由于泛函分析的高度抽象化,并且与经典的分析、几何、拓扑、代数、函数论、群论、概率论、计算数学、最优化理论、控制理论和理论物理等学科的深度融合,这就要求在教材编写和教学内容的选取上,一方面要学习泛函分析自身的基本理论、思想和方法,提升学生的抽象思维能力和逻辑推理能力,另一方面又要切合硕士各个专业对泛函分析的共同需求。本课程内容正是基于以上目标而设计。

二、先修课程

数学分析、高等代数、点集拓扑、实变函数和复变函数等。

三、课程目标

本课程面向数学院(系)各个专业的研究生,目标是在本科阶段泛函分析知识的基础上,进一步学习算子理论和算子代数、算子半群和非线性泛函分析的基础知识,及泛函分析在变分法、偏微分方程、优化理论、理论物理和工程学中的一些应用。通过泛函分析的学习,使研究生能够掌握泛函分析的基本原理、基本思想和方法,培养研究生综合运用泛函分析的数学思维能力、逻辑推理能力、提高学生的数学修养,为以后的进一步学习、数学研究和数学应用打下坚实的基础。提升研究生发现问题和解决问题的能力,以及把具体的问题抽象化,利用泛函分析的工具和方法解决理论问题和实际问题的能力。

四、适用对象

数学专业硕士和博士研究生,至少64学时。

五、授课方式

主要采用课堂讲授的方法。

六、课程内容

1. 泛函分析基础

主要包括抽象积分、复测度、度量空间、各种紧性的刻画、不动点定理在积分、微分方程的中应用等;赋范空间、Banach 空间、Hilbert 空间、线性泛函延拓定理以及泛函分析的三大基本原理(开映射定理、闭图像定理和共鸣定理)及应用等。

2. 拓扑线性空间

主要包括拓扑空间基础、局部凸空间、凸集分离定理、赋范空间上的弱拓扑及对偶空间上的弱 * 拓扑、Banach-Alaoglu 定理、Krein-Milman 端点定理以及在优化理论中的应用等

3. 算子理论

主要包括各种特殊的算子类、共轭算子、线性算子的谱、紧算子及其谱理论、Fredholm 算子和指标、正算子和极分解等。无界线性算子有丰富的内容,可根据各学校的需求进行选择。

4. 算子代数初步

主要包括 Banach 代数、C * -代数、乘法线性泛函、极大理想空间及 Gelfand 表示、GNS 构造、谱测度和谱积分、函数演算及正规算子的谱分解定理、算子空间上的各种拓扑、von Neumann 代数初步等。

5. 算子半群

主要包括向量值函数、Bochner 积分和 Pettis 积分、算子半群的概念、C_0 类算子半群的表示、无穷小生成元、单参数酉算子群、Stone 定理及遍历理论等。

6. 非线性泛函分析

主要包括非线性算子的微分、隐函数定理、泛函极值、Brouwer 度、Leray-Schauder 度、不动点定理及其应用等。

七、考核要求

采取闭卷考试的方式。标准为:90~100,优;80~89,良;70~79,中;60~69,及格;0~59,不及格。

八、编写成员名单

步尚全(清华大学)、郭坤宇(复旦大学)、纪友清(吉林大学)、卢玉峰(大连理工大学)

07　科学计算

一、课程概述

科学计算作为当今科学研究的三大手段(理论分析、科学实验、计算机模拟)之一的计算机模拟的主要组成部分,是每个将来以科学研究为职业的研究生必须了解的。从某种意义上讲,一个国家的科学计算能力,是国家综合实力的一个重要指标。随着数据科学和人工智能等科学技术的发展,越来越多的数学学科研究生将投身这些方向的研究中,这必将对数学学科研究生科学计算能力的要求越来越高。在数学学科研究生中开设科学计算课程是非常必要的。

二、先修课程

数学分析、高等代数、微分方程(包括常微分方程和偏微分方程)的基础知识、(线性)泛函分析的基础知识、计算机基础知识(最好了解一点程序设计语言)、随机数学的基础知识。

三、课程目标

通过本课程的学习,懂得科学计算的基本原理,掌握典型问题的科学计算方法及其理论,具备在计算机上解决一般科学计算问题的能力。

四、适用对象

数学学科所含二级学科(除计算数学外)的博士和硕士研究生。

五、授课方式

课堂理论教学和计算机实验教学相结合。

六、课程内容

第一部分　理论部分(课堂教学)

1. 科学计算的基本概念

数字计算机中数的表示与运算,计算中的逼近与误差,误差的产生、传播与控制。

2. 线性代数方程组的解法

包括问题的条件数、消元法、经典的迭代法。大规模线性代数方程组的解法(共轭梯度法等)。线性最小二乘问题的解法。

3. 代数特征值问题的解法

包括问题的条件数、幂法与反幂法、QR 方法等(介绍广义特征值问题、几种经典的矩阵变换和奇异之分解等)。

4. 非线性方程及方程组的解法

包括方程式的各种迭代法和方程组的 Newton 法与拟 Newton 法。介绍收敛速度的概念和各种方法收敛速度的理论分析结果。

5. 优化问题的数值方法

包括一维问题的优化算法、无约束优化问题、约束优化问题、非线性最小二乘问题等。

6. 微分方程的数值求解

常微分方程初值问题的数值方法(线性多部法、Rung-Kutta 方法),常微分方程边值问题的数值方法(有限差分法与有限元法),偏微分方程的数值方法(有限差分法与有限元法)。

7. 插值逼近与样条函数及数值积分

包括插值逼近的基本概念,多项式插值(拉格朗日插值与艾米特插值),三角函数插值,样条函数的概念,三次样条插值问题与曲线拟合问题,数值积分的基本方法等。

8. 快速算法

算法复杂性分析、快速 Fourier 变换等。并行算法简介。

9. 不适定问题的数值方法及数值微分

10. 随机模拟方法

包括随机数的计算机生成,高维数值积分的蒙托卡勒方法等。

注:内容 1~7 应是课程的必须完成的内容,而 8~10 可以视为开拓内容,根据情况采取灵活

的方式处理,如课外专题学术讨论、课外阅读作业等。

第二部分　实验部分

(1) 常用数值分析软件的使用,例如当前的 MATLAB 软件。

(2) 结合理论课内容,完成一些经典算法的计算机实现。

七、考核要求

理论部分通过考试方式考核,实验部分可通过完成实验报告或短论文方式考核。

八、编写成员名单

马富明(吉林大学)

08　微分方程

一、课程概述

微分方程(包括常微分方程和偏微分方程)是数学学科中十分重要的经典领域,与数学的基础领域(分析、几何与代数)以及物理、力学、化学、生物等问题都有密切关系,它是联系实际问题的重要途径。主要研究课题有:常微分方程与偏微分方程的定性分析和稳定性理论、适定性理论(存在性、唯一性和解对已知数据的连续依赖性)、初边值问题和解析理论;研究在泛函空间上的变分方法、偏微分方程及方程组的正则性理论和奇异性分析,非线性分析理论和微局部分析理论等。微分方程理论课程的学习,加上应用现代计算机与网络技术等可以研究方程的精确解,并用来研究弹性力学和断裂力学中产生的具体问题,以及基层图像处理、编码分析、生物和化学中的有关问题等。

二、先修课程

本科常微分方程的基本课程、数学物理方程、泛函分析、变分法初步课程。

三、课程目标

通过本课程中基本概念和基本定理的阐述和论证,培养研究生的抽象思维与逻辑推理能力,提高研究生的数学素养。在重视数学论证的同时,强调数学概念的物理、力学等实际背景,培养研究生应用数学知识解决实际工程技术问题的能力。

四、适用对象

本课程设置的第一部分可以作为学术型硕士研究生的必修或选修课程。第二部分加深的课程可以作为一年级博士生的必修或选修课程。本课程适用于数学一级学科的分析类学科方

向(包括常微、偏微、几何分析和动力系统),授课教师可以根据本校研究生培养的具体情况对以下列举的教学内容做适当选择和增补,也可以适当调整课时数。

五、授课方式

适用于在课堂上使用黑板教学,但也可以利用现代电子设备,比如可以将本课程的主要内容用 PPT 投影出来,再在黑板上演算和讲解,这样做可以加深学生的印象,同时又能够融会贯通。

六、课程内容

第一部分(适用于学术型硕士研究生,54 课时)

第一章　常微分方程的稳定性和李雅普诺夫函数(6 课时)

1. 常微分方程的基本定理
2. 李雅普诺夫(Lyapunov)函数
3. 常微分方程的稳定性和吸引性
4. 线性系统稳定性的代数条件
5. 线性系统稳定性的几何判据
6. 多项式系统稳定的几何判据
7. 常系数线性系统 Lyapunov 函数的构造

第二章　Lyapunov 直接法的基本定理(6 课时)

1. Lyapunov 直接法的几何思想
2. Lyapunov 稳定性定理
3. 一致稳定性定理和一致渐近稳定性定理
4. 渐近稳定性定理和等度渐近稳定性定理
5. 指数稳定性定理
6. 不稳定性定理

第三章　李雅普诺夫直接法的拓广(6 课时)

1. 自治系统稳定性定理的推广
2. Krasovaskii-Barabashin 渐近稳定性定理
3. Krasovaskii 不稳定定理
4. LaSalle 不变原理
5. 比较原理
6. 系统的解的有界性

第四章　广义函数与 Sobolev 空间(10 课时)

1. 广义函数的基本概念、基本空间
2. 广义函数及其运算
3. 具紧支集的广义函数和广义函数的构造定理
4. 缓增广义函数和 Fourier 变换
5. Paley-Wiener-Schwartz 定理

6. Sobolev 空间
7. Sobolev 空间的嵌入定理和迹定理

第五章　偏微分方程的一般理论(6 课时)

1. 偏微分方程的基本解(包括椭圆、抛物和双曲方程的基本解)
2. 偏微分方程的特征与分类
3. Cauchy-Kowalevskaya 定理
4. Holmgren 定理

第六章　椭圆型方程(6 课时)

1. 椭圆型方程边值问题的广义解
2. 椭圆型方程边值问题的可解性
3. 解的正则性

第七章　双曲型方程(7 课时)

1. 双曲型方程的能量不等式、解的唯一性和稳定性
2. Cauchy 问题解的存在性
3. 初边值问题解的存在性
4. 对称双曲组

第八章　抛物型方程与算子半群方法(7 课时)

1. 抛物型方程的定解问题,能量不等式和极值原理
2. 求解抛物方程初边值问题的 Galekin 方法
3. 算子半群与无穷小生成元
4. 算子半群方法的应用

第二部分　(适用于博士生一年级,54~72 课时)

第一章　二维系统的平衡点(6~8 课时)

1. 常系数线性系统
2. 非线性系统的平衡点与平衡点的稳定性
3. 线性近似方程为中心的情况
4. 非线性系统的高阶平衡点

第二章　二维系统的极限环(8~10 课时)

1. 极限环与极限环的稳定性
2. 后继函数与极限环
3. 极限环的指数与稳定性判断法
4. 平衡点的指数
5. 极限环位置的估计
6. 无穷远点和全局拓扑结构图

第三章　动力系统(8~10 课时)

1. 动力系统与导算子
2. 轨线的极限状态与极限集的性质
3. 截割与流匣

4. 平面极限集的性质与 Poincaré-Bendixson 定理
5. Poincaré-Bendixson 定理的应用

第四章　微局部分析与拟微分算子(8 课时)

1. 拟微分算子象征类及振荡积分
2. 稳定位相法
3. 拟微分算子代数
4. 椭圆和亚椭圆拟微分算子
5. 椭圆算子的逆和 L^2 有界性定理

第五章　一般线性椭圆型方程和抛物型方程的 L^2 理论(12~18 课时)

1. 解 Poisson 方程的变分方法及 Poisson 方程弱解的存在性和正则性
2. 抛物型方程的能量方法,Rothe 方法和 Galerkin 方法
3. Poisson 方程弱解和热方程弱解的整体有界性及 De Giorgi 迭代
4. Poisson 方程弱解的局部有界性及 Moser 迭代
5. 非齐次热方程弱解的局部有界性,上下解方法
6. Laplace 方程解的 Harnack 不等式,齐次热方程解的 Harnack 不等式
7. 椭圆型方程解的 Schauder 估计以及抛物型方程解的 Schauder 估计
8. 椭圆型及抛物型方程的极值原理和比较原理,古典解的存在唯一性

第六章　一阶拟线性双曲型偏微分方程(12~18 课时)

1. 一阶拟线性双曲型方程光滑解的局部存在性以及解的爆破
2. 分片光滑解,激波和稀疏波
3. R-H 条件,熵条件和熵解
4. 单个方程的激波理论,Burgers 方程
5. 熵解的存在性和唯一性
6. 方程组的 BV 熵解的存在性
7. Riemann 问题,Glimm 格式
8. 补偿列紧理论,不变区域理论

七、考核要求

本课程第一部分可以采取期末笔试的方式考核(按照百分制,60 分以上为合格);本课程第二部分可以采取期末笔试的方式考核,也可以选择做小论文的形式来考核(笔试按照百分制 60 分以上为合格,写小论文按照优良中差来打分)。

八、编写成员名单

陈化(武汉大学)

09 组合数学

一、课程概述

组合数学主要研究满足一定条件的组态的存在性、计数及构造等问题,它大体上可分为代数与计数组合学、图论、组合设计、组合优化等。近年来,计算机科学、编码理论、数字通信等学科的迅速发展,提出了一系列需要组合数学解决的理论和实际问题,加之组合数学自身以及其在其他数学分支的应用使得组合数学成为当今发展极为迅速的数学分支之一。组合数学应是数学学科研究生的必备基础课程,学好本课程,可为进一步学习计算机科学、编码和密码学、网络结构等专业课程打下坚实的基础。

二、先修课程

微积分、线性代数、概率论。

三、课程目标

掌握组合计数、存在性理论、图论基础、组合设计、组合的代数和概率方法等基本原理和方法,强调组合思想及组合数学在各个领域的应用。

四、适用对象

基础数学、应用数学、运筹学与控制论等方面的博士研究生和硕士研究生。

五、授课方式

主要采用课堂授课,配合课后练习与答疑。

六、课程内容

1. 预备知识

集合与关系、偏序集、初等计数方法、组合恒等式。

2. 递推关系与生成函数

线性齐次递推关系、线性非齐次递推关系、普通生成函数、指数型生成函数。

3. 容斥原理

容斥原理、偏序集上的 Möbius 反演、生成函数与容斥原理的推广。

4. 特殊计数序列

Catalan 数、Stirling 数、分拆数、q-模拟。

5. Pólya 计数定理

群在集合上的作用、置换群的轮换指标、Pólya 计数定理、带权的 Pólya 计数定理。

6. 图论

基本概念、树、连通性、欧拉图和 Hamilton 图、染色理论、匹配、独立集、覆盖、流与割、Menger 定理。

7. 代数图论

图谱、连通度、扩散系数、Ramanujan 图、强正则图。

8. 鸽笼原理与 Ramsey 理论

鸽笼原理、Ramsey 理论、相异代表系、Hall 定理、矩阵的组合性质。

9. 组合设计

关联结构、t-设计、平衡不完全区组设计、有限射影平面、Hadamard 矩阵和 Hadamard 设计、正交拉丁方、差集、设计与码。

10. 代数方法

奇镇定理、相交的集合、Erdös-Ko-Rado 定理、多项式空间、组合零点原理。

11. 概率方法

随机图、线性与修补、二阶矩、Lovász 局部定理。

12. 极值图论

正则引理、移除引理、嵌入引理、计数引理、随机选择。

七、考核要求

总考核成绩综合考虑平时课堂练习表现、课后习题完成情况与期末考试得分。

八、编写成员名单

冯荣权(北京大学)、王光辉(山东大学)

10 运筹学

一、课程概述

“运筹学”(Operational Research,现常用 Operations Research)这一名词最先出现在“二战”期间(我国在 1956 年曾用过“运用学”的名词,1957 年正式定名为“运筹学”)。当时为对付德国空袭,英国军方组织一些跨学科的专家研究如何有效运用雷达,并把这种工作称为“Operational Research”。事实上,运筹学的早期工作可追溯到 1914 年提出的兰彻斯特战斗方程。爱尔朗 1917 年在研究电话通信系统时提出的队论的一些著名公式;丹捷格在 1947 年发表的求解线性规划问题的单纯形法;冯·诺伊曼和摩根斯坦合著的《博弈论与经济行为》(1944 年)等都是早期运筹学发展史上典型代表之作。

“二战”以后,运筹学的研究中心从英国转移到了美国,从军事部门转移到了经济管理部门,研究的范围也渐趋扩大。20 世纪五六十年代是运筹学蓬勃发展的开端。在 20 世纪 50 年代中

期，钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用。迄今，许多大学的数学学院、工学院及管理学院等都开设运筹学课程。

运筹学的主要特点包括：以数学为主要工具，寻求解决各种问题的最优方案；从系统的观点出发，研究全局性的问题和综合优化的规律；强调成果的实用性和对研究结果的“执行”，后者是运筹工作中的一个重要组成部分；由各种专家综合应用多种学科的知识来解决实际问题是运筹学研究的重要特点；理论和应用的发展相互促进。

运筹学的方法和实践已在科学管理、工程技术、社会经济、军事决策等方面起着重要的作用并已产生巨大的经济效益和社会效益。同时，运筹学以越来越快的速度渗透到信息科学、生命科学和能源科学等前沿基础性研究中去，成为这些学科不可缺少的研究工具。

总之，运筹学的发展具有很强的实践需求背景，是一门集基础性、交叉性、实用性于一体的学科，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据，因此也被称为“做得更好的科学”(Science of Better)。凡一切可以定量化的管理系统都在其研究范围内。因此，学习运筹学对于几乎所有专业的研究生都是十分重要和非常必要的。

二、先修课程

本课程所需的前期课程取决于欲学习运筹学的那些分支。一般来说，若主要关注确定性模型，则数学系的学生需要基本的数学分析、高等代数的知识。若对随机模型亦感兴趣，则还需要学习概率论、数理统计的基础知识。若想进一步学习动态、随机的复杂模型，则应进一步掌握一些随机过程甚至偏微分方程的基本理论。对于工科学生来说，则高等数学、线性代数的基本知识是必须的。

三、课程目标

研究生应该学会将不同领域的实际问题构建成相应的运筹学模型；能基于合适的运筹学分支的知识，对所建模型的基本性质进行分析，并进而选择恰当的算法对其进行有效求解；能通过对模型的检验、对算法的评估来对所得最优解做进一步的稳健性分析，以便更好地指导解的实施与实际问题的有效解决。对于数学系的研究生，还应具备对感兴趣的运筹学模型或分支进行理论研究、提出改进模型的方法、设计新算法的途径以及发展新的理论，从而推动运筹学的发展。

四、适用对象

运筹学的经典分支是所有应用数学、工商管理、电信工程、机械工程、经济金融等专业的硕士、博士研究生都需要学习的基本技能。博士阶段的学生则可以根据需要选修一些如线性、非线性规划，随机规划，离散时间最优控制、动态存储、动态博弈等方面的知识；特别是数学系的研究生，可以考虑对运筹学一些近代分支进行深入学习，以便开展相应的学术研究。

五、授课方式

运筹学内容非常丰富，不同分支源于解决不同领域实际问题的需要。为此，建议主要采用多媒体的教学方式，以便能生动、快速地展示一些实际问题或应用案例，使学生很快掌握运筹学

相应分支的产生背景与适用范围,且便于讲授相关的算法、动态演示算法的迭代过程或仿真效果。教师应对相关分支产生的历史、概念引进的必要性、模型的适用范围以及算法的实现等进行系统的解读;应适时配合板书,说明有关模型的推导或算法的数学性质。对于强调应用或管理、工程专业的研究生,可考虑配合课外的案例教学、小项目研究(mini project)等,使研究生切实掌握如何运用运筹学的相关知识来解决实际问题的能力。对于数学系的研究生,特别是博士研究生,则要坚持理论证明、算法设计和分析与实际应用并举;而工科研究生虽然以应用为主导,但能够接受的理论证明也是必要的。

六、课程内容

运筹学内容丰富、应用范围广,已形成了一个相当庞大的学科体系。从模型特点分类,它既包括确定型模型也包括随机型模型,既包括线性模型也包括非线性模型,既包括静态模型也包括动态模型。依据各个分支的特点,可以将运筹学的主要内容分类如下。

1. 规划论

主要解决在给定资源约束下的目标最优化(效益、成本、效用等),包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、随机规划、多目标规划等。这部分是重点内容。

2. 网络分析

主要研究生产组织、大型工程计划管理中诸如最短路径问题、最小费用流问题、最优指派问题等,主要包括图论、网络规划、网络计划技术。

3. 排队论

主要研究服务系统中服务效率和服务成本极其优化的问题,解决实际中与排队现象有关的各种问题。排队论又称随机服务系统。

4. 博弈论

研究具有利害冲突的各方,如何制定出对自己有利从而战胜对手的斗争策略。博弈论又称对策论。

5. 决策论

研究决策者如何从多个选项中评价和选择一个最优方案,从而能达到他的预期目标。

6. 存储论

研究如何确定合理的存储量、购货批量和购货周期。存储论也称为库存论。

7. 可靠性理论

研究如何保证由成千上万个工作单元或零件组成的复杂系统或设备的工作稳定性或可靠性。

经过多年的发展,上述每个分支的内容都非常丰富,许多都发展成为独立的研究领域;而不同分支的内容、特点可能迥异。

■重点:培养学生针对欲解决问题的特性,能选取合适的运筹学分支方法对其进行描述和求解,掌握定量分析问题的基本技能和数学方法,依据需求对现有模型进行改进,或发展新的理论与算法的研究能力。

■难点:不少问题理论上可采用不同的运筹学模型进行刻画。如何根据具体要求进行抉择,如何平衡建模的精确性与求解效率,如何从解决实际问题的过程中发现新的学术问题,发展新

的模型、理论与算法,然后再反哺促进更好地解决现实问题。这一方面需要教师在讲授过程中有意识地培养学生在这些方面的能力,另一方面需要学生不断摸索,在自学、解决问题的过程中体会、提高自己的上述能力。

七、考核要求

对于大面积的硕士研究生课程,可采用闭卷方式考核,侧重其对运筹学基本知识的掌握情况;针对不同专业特定开设的课程,特别是博士研究生课程,建议以开卷形式,要求学生从大的方面,撰写研究报告或小项目总结,着重考核其对运筹学思想、建模、算法设计、理论分析与解决问题效果等的综合能力。

八、编写成员名单

陈志平(西安交通大学)、张立卫(大连理工大学)、朱书尚(中山大学)

11 控制理论

一、课程概述

控制理论是第二次世界大战之后由于自动化技术的需要而产生的新的工程科学理论。由美国数学家维纳于 1948 年在其出版的专著《控制论》中所开创,研究机器对信号的接收与处理。但机器是人造的系统,维纳所著的《控制论》一书的副标题《或关于在动物和机器中控制和通信的科学》所想表达的正是人在机器控制中的动态特征。控制论是对原理和机理的探索,控制理论则是原理和机理的应用。

要使得机器能代替人的劳动,就自然需要机器能像人一样地工作。智能生命体行为有两个最主要的特点:反馈和优化,这也构成了自动控制的基本原理和核心技术。反馈是根据自己的状态决定行动的一种机制。在充满不确定性的世界里,反馈是每个成功的人或者动物乃至机器必需的选择。但不是所有的反馈都是可行的,只有相对优化的反馈才有意义。所以控制是一门(人为)设计相对优化反馈的科学。

自动控制的思想虽然可以追溯更早,但主要的还是 18 世纪开始的主要用于控制温度的自动控制装置和在风车中使用的离心调速器。集大成者是瓦特的蒸汽离心调速器,这是发生在 1788—1789 年科学技术史上最重要的历史事件。整个 19 世纪的前 70 年,蒸汽离心调速器得到了极大的发展。钱学森在《工程控制论》修订版的序言中阐述现代化、技术革命与关系时指出:瓦特的蒸汽机是大工业普遍应用的第一个动力机。物理学家麦克斯韦在 1868 年出版《论调速器》,奠定了调速器的理论基础,催生了熟知的 Routh-Hurwitz 稳定性判据。进入 19 世纪后期,第二次工业革命由电的广泛使用开启,自动控制成了必需。1922 年,Nicholas Minorsky 给出了适用于位置控制系统而后广泛使用的比例-积分-微分(PID) 控制器的一般数学表达式。Harold

Stephen Black 在 1927 年设计了第一个电话通信中的负反馈放大器。Harry Nyquist 在协助 Harold Stephen Black 的过程中分析了负反馈放大的稳定性问题,在 1932 年发表了现在熟知的奈奎斯特稳定性判据一文。在第二次世界大战期间,火炮跟踪问题引发了维纳关于随机控制的研究。维纳在 1948 年发表著作使得控制理论正式进入数学的舞台。钱学森在 1954 年出版的《工程控制论》,使得控制理论在工程中得以实现。总的说来,1940—1960 年是经典控制理论的形成、发展时期。研究对象是单输入、单输出时不变系统,主要方法是基于传递函数的频域法。一经有了数学的基础,控制理论在 1960—1980 年代开始了飞速发展的黄金时代。1960 年,第一次国际自动联合会(IFAC)在莫斯科举行,三位世界级的数学家,苏联的庞特里亚金、美国的贝尔曼、卡尔曼分别报告了现在称为最优控制的最大值原理、动态规划方法和含有量测噪声的状态估计方法,开启了 1960 年到 1980 年现代控制理论的新时期。这个时期的研究以数学模型为出发点,研究多输入、多输出系统,主要方法是状态空间法,且多种数学工具都在控制理论中有应用。1980 年代以后,控制理论出现了一个范式性转移的趋势,这就是鲁棒控制理论的出现。鲁棒控制理论充分考虑了数学模型难以建立的实际困难,实际上不确定性才是控制理论需要解决的主要问题。如果一个系统在确定的环境下运行,所有的控制问题最后都会因技术的进步归于制造业的问题。控制理论之所以有用,恐怕还在于其能处理系统中的不确定性。随着计算机和互联网的发展,下一代的控制理论也许朝着网络化、智能化、分布式控制的方向发展。面对的最大挑战如:

(1) 控制系统和环境的不确定、复杂性;

(2) 控制系统的规模庞大且结构复杂,如网络化控制系统;

(3) 计算机高度介入控制系统的设计;

(4) 与众多学科的交叉。

控制理论是应用数学的一个分支,也是一门工程科学。大部分的研究人员来自数学、自动化、电子与电气工程、计算机、机械工程等专业。最大的国际学术组织是国际自动控制会(IFAC),从 1960 年在莫斯科举行第一次大会起,每三年举行一次国际大会,每年召开的与控制有关的国际会议超过 300 次,影响最大的是美国电子与电气工程师协会 IEEE 举办的控制与决策年会 CDC,在全世界 IEEE 有超过 40 万的会员。

控制理论发展到现在,已经有几种不同的课题。最基本的课题包括集中参数(有穷维系统)的线性系统理论、非线性系统理论、随机控制系统理论、分布参数系统理论(无穷维)。

本课程因此需要让研究生明确控制理论的基本方法和理论,包括基于传递函数方法的频域理论和基于状态空间的时域理论。

二、先修课程

控制理论的前期课程并不需要很多,一般来说,数学系控制理论专业的学生需要基本的数学分析、高等代数(特别是矩阵论)、常微分方程、复变函数、傅里叶分析。如果需要学习最优控制(极大值原理)的基本理论,则需要掌握一些变分法、凸分析的基础知识。如果需要知道偏微分方程控制的基本理论,则需要一些泛函分析、数学物理方程的知识。如果需要知道随机控制的理论,则需要一些基本的概率论、实变函数、随机过程、随机微分方程的基础理论。对于工程学科的控制理论课程,则需要高等数学、矩阵理论、常微分方程的基础知识,最好还有一点复变

函数的基础知识以理解古典控制原理中的一些方法。

三、课程目标

控制理论是最大的交叉学科之一，应用数学、自动化、电子与电气、电子工程、机械工程（尤其是液压专业）专业的研究生大多数需要学习自动控制理论。大体来说，线性系统的基本理论是每个学习控制理论的学生必须熟练掌握的知识，包括时域分析和状态空间的频域分析，这是所有以后进一步学习和研究的基础。根据不同的学科，侧重点的不同，安排一些选修的课题，例如非线性系统、随机系统（特别是线性的 Kalman 滤波）、分布参数系统理论。其中非线性系统指的是集中参数的非线性系统，即用常微分方程描述的非线性系统。要真正理解控制理论的研究，非线性系统是非常合适的选题，因为一些线性系统的理论推广到非线性系统需要特别的办法，例如系统的零点、线性系统有几种定义是等价的、单输入、单输出系统就是传递函数的零点。可是非线性系统没有传递函数的概念，所以需要用诸如零动态才能说得清楚。对研究生来说，线性系统和一些非线性系统方面的知识可能是大部分学生需要掌握的基础知识，能够阅读一些基本的线性系统和非线性系统文献是起码的要求。

四、适用对象

线性系统理论是所有应用数学、自动化、电子与电气、电子工程、机械工程专业的硕士、博士研究生都需要学习的基础理论。博士阶段的学生则可以根据需要选修一些非线性系统、随机系统和分布参数系统的控制理论，特别是数学系控制理论专业的研究生。

五、授课方式

传统的教学方式不会改变太多，还是需要有控制理论研究经验的老师课堂讲解为主。多媒体的教学是必需的选择，因为通过动画、数值仿真让学生亲历控制设计过程与效果是非常好的现代教学手段。但这不能代替教师对课程历史、概念引进的必要性、用途、原理的讲解。教师的研究经验在很大程度上决定着所授课程的水平，照本宣读对任何的课程都不是好的办法。数学系的控制课程则要坚持理论的证明，但这和纯粹数学的教学有所区别，需要说清楚理论的用途。工程系的控制课程虽然以应用为主导，但能够接受的理论证明也是必要的。

六、课程内容

课程的主要内容是开环控制系统的性质、反馈设计和系统分析（包括频域和时间域的系统分析）。

■ *重点、难点：对控制思想和控制方法的理解和掌握。*

开环系统的性质包括多输入、多输出线性系统的状态空间表示，频域的输入、输出表示及其等价关系；系统方块图和信号流图；开环系统的可控性、可观性以及二者的对偶性原理；可控性从 Gram 矩阵开始，导出 Kalman 秩条件和 Hautus 引理，直到最后的极点配置；极点配置与状态反馈镇定有关，所以稳定性理论与 Lyapunov 方法与 Lyapunov 方程可以就此引出。特别是对可控的系统通过对偶系统的输出解析的求出实现状态转移的能量最优控制非常的重要，因为这可以推广到无穷维线性系统特别是线性双曲系统的可控性问题。而且这样的对偶关系也给出了

数值的求解实现状态转移的可能性;能稳性与可检测性以及二者的关系。其中状态估计的观测器设计方法最为重要。观测器是从状态反馈过渡到输出反馈最主要的手段,在非线性系统、分布参数系统一切的控制设计中发挥着极端的重要性。线性系统的分离性原理由观测器设计后导出,这在随机系统的 LQG 中有相应的推广。自然地,线性系统的标准型可以在各个概念的分别讲解后完成。开环系统的零点包括多输入、对输出系统的传输零点,因此导致非极小相位系统也是开环系统的基本概念之一。由此才能正确地理解控制理论最大问题之一的输出调节和跟踪。因为大部分的控制系统并不是调整所有的状态,输出跟踪就是在保证系统有界的大前提下使得性能输出跟踪预定的轨道。

控制策略设计的方法和途径很多,其中几个基本的方法例如线性状态反馈、输出反馈、PID 原理、基于矩阵 Riccati 方程的 LQ 方法、对付不确定性的内模原理,研究生完全可以掌握。如果觉得随机系统控制理论需要的数学基础太多,则对确定性系统的 Kalman 滤波完全可以在 LQ 设计后讲清楚。讲清楚 PID 的同时需要掌握稳定性分析的 Routh-Hurwitz 判据的理论。

系统分析主要是一阶、二阶系统的瞬态响应,Nyquist 稳定性判据,控制系统的分析与综合。在这方面 LQ 问题是一个理想的示例。单输入、单输出系统的根轨迹法也是需要精通的理论。

以上主要的是线性系统问题。非线性系统则可以引入相平面方法、Lyapunov 函数方法、反馈线性化方法以及相对阶、零动态、无源性原理等概念。

现代控制理论大部分内容还是建立在数学模型基础上的理论。为此,在控制理论的开始可以加入一些系统辨识包括建模的内容。在教学内容上也可以根据不同的授课对象加入一些数值算法。

七、考核要求

课程考核还是围绕开环性质(可控、可观、可镇定、可检测),控制设计(状态反馈镇定,基于观测器的输出反馈镇定, PID 以及一般的动态反馈控制),和系统分析三部分所掌握的理论和分析能力。数学系的学生以理论证明为主,工程系的学生则以熟练掌握基本理论,且解决问题的能力为主。

八、编写成员名单

郭宝珠(中国科学院数学与系统科学研究院)、邓飞其(华南理工大学)、夏元清(北京理工大学)

12 概率论与数理统计

一、课程概述

本课程为概率论和数理统计专业博士、硕士研究生的专业基础课,并与数学类其他课程,如

偏微分方程、调和分析、微分几何等有紧密的联系。近 20 年来,概率论与数理统计从理论到应用都有重要进展,在物理、生物、控制、金融等诸多领域有着广泛的应用,本课程的内容将为学生从事相关理论研究和应用研究奠定基础。

二、先修课程

实变函数、泛函分析。

三、课程目标

本课程为概率论和数理统计专业博士、硕士研究生的专业基础课,其内容是以实变函数、泛函分析等为理论基础。概率论系统介绍测度论理论、几种重要的随机过程(离散时间鞅、马氏链、布朗运动、Lévy 过程、平稳过程、马氏过程等)与随机分析理论(随机积分、Itô 公式等)。通过本课程的学习,希望学生能全面地掌握测度论、随机过程、随机分析的基础知识。数理统计系统地讲授数理统计基础性的概念、方法、理论和计算,为今后学习统计学的各个分支、从事专业研究以及应用统计学打下基础。

四、适用对象

概率专业硕士、博士研究生的专业课和相关学科研究生的选修课。

五、授课方式

课堂讲授与上机实习。

六、课程内容

第一部分　概率论

概率论分为三章,分别为测度论、随机过程和随机分析。

第一章　测度论

1. 集合类与测度

集合运算、几何形式的单调类定理、外测度与测度扩张、测度逼近。

2. 可测映射

可测映射、函数形式的单调类定理、可测函数的收敛。

3. 积分和函数空间

积分的定义和性质、积分和极限换序、不定积分和符号测度、Lp 空间和对偶空间、Daniell 积分。

4. 乘积空间上的测度与积分

乘积可测空间、乘积测度与 Fubini 定理、由 σ 有限核生成的测度、无穷乘积空间上的概率测度、Kolmogorov 相容性定理和 Tulcea 定理的推广。

5. Hausdoff 空间上的测度与积分

拓扑空间、局部紧 Hausdoff 空间上的测度与 Riesz 表示定理、Hausdoff 空间上的正则测度、空间 C0(X)对偶、用连续函数逼近可测函数、乘积拓扑空间上的测度与积分、波兰空间上有限测度

的正则性。

6. 测度的收敛

欧氏空间 Borel 测度的收敛、距离空间上有限测度的弱收敛、胎紧和 Prohorov 定理、可分距离空间上概率测度的弱收敛、局部紧 Hausdoff 空间上 Random 测度的淡收敛。

第二章　随机过程

1. 离散时间鞅

鞅的概念、鞅不等式、Doob 收敛定理、最优停时定理等。

2. 数状态的马氏过程

随机游动、分枝过程、可数状态离散时间马氏过程的状态分类、遍历理论和泛函的极限分布、可数状态连续时间的马氏过程的基本概念及转概阵的分析理论简介。

3. 平稳独立增量过程(Lévy 过程)

Poisson 过程、Poisson 点过程、布朗运动(包括反射原理、反正弦率、局部时、重对数率、不变原理等)、稳定过程、Lévy 过程。

4. 马氏过程一般理论简介

马氏半群、Feller 过程、强马氏性、不变测度、遍历性。

第三章　随机分析

1. 鞅及其性质

随机过程的可测性(停时,适应过程,循序可测过程)、鞅(离散时间鞅,连续时间鞅)。

2. 布朗运动及平方可积鞅

Brown 运动(定义和平方变差)、连续平方可积鞅、连续局部鞅以及连续半鞅的随机积分、平方变差过程。

3. 平方可积鞅及随机积分

半鞅的 Itô 公式、BDG 不等式、指数鞅和 Girsanov 定理、连续局部鞅的随机积分表示(弱可料表示,强可料表示)。

4. 布朗运动和偏微分方程

偏微分方程解的概率表示、调和函数与 Dirichlet 问题、Feynman 和 Kac 公式。

第二部分　数理统计

数理统计共分为五章,分别为高等数理统计、多元统计分析、非参数统计、回归模型和生存分析。

第四章　高等数理统计

1. 预备知识
2. 点估计
3. 点估计的大样本性质
4. 假设检验
5. 区间估计
6. Bayes 统计
7. 影响曲线与稳健估计
8. 拟合优度检验与非参数检验

9. U 统计量
10. 统计计算方法
11. 经验似然和 GEE 方法
12. 多重比较

第五章　多元统计分析

1. 常用的多元分布

多元正态分布、Wishart 分布、T2 统计量及其他常用统计量。

2. 判别分析

距离判别、Fisher 判别、Bayes 判别等。

3. 聚类分析

距离和相似系数、K-means 聚类、分层聚类、支持向量机等方法。

4. 主成分分析

总体主成分分析、样本主成分分析。

5. 因子分析

因子分析模型、因子旋转、因子得分。

6. 典型相关分析

典型相关系数与典型变量、广义相关系数。

7. 多变量回归

参数估计、假设检验、变量选择。

第六章　非参数统计

1. 非参密度函数的估计和检验
2. 非参数回归
3. 部分线性模型
4. 二元选择模型
5. 可加模型
6. 半参变系数部分线性模型

第七章　回归分析

1. 回归分析基础知识
2. 模型概论
3. 参数估计
4. 假设检验和区间估计
5. 模型诊断
6. 方差分析模型
7. 协方差分析模型
8. 混合效应模型
9. 广义线性模型

第八章　生存分析

1. 基本概念和基本模型

2. 删失和截断
3. 右删失和左截断数据的生存时间函数的非参数估计
4. 其他抽样方案下生存时间函数的估计
5. 单变量估计的核平滑方法
6. 非参数估计的假设检验
7. 固定协变量的半参数比例危险回归
8. 半参数比例危险模型的改进
9. 加法危险回归模型
10. 参数模型的统计推断

七、考核要求

闭卷笔试。

八、编写成员名单

董昭(中国科学院)、胡晓予(中国科学院大学)、曹桂兰(中国科学院大学)、张三国(中国科学院大学)、孙志华(中国科学院大学)